Τελική Εξέταση-Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, 27/6/2019

Διδάσκοντες: Ελευθέριος Νικολιδάκης-Χρήστος Σαρόγλου.
Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση δεν βαθμολογούνται.

Θέμα 1ο.

i) [0.7 μον.] Έστω $\{a_k\}$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Να δειχθεί ότι αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ επίσης συγκλίνει. Το αντίστροφο ισχύει;

ii) [1.0 μον.] Να εξεταστούν ως προς τη σύγλιση οι σειρές $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}-1}$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

iii) [0.8 μον.] Να βρεθούν όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$ συγκλίνει.

Θέμα 2ο.

i) [1.0 μον.] Έστω $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to B$, $g : B \to C$ δύο ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Να δειχθεί ότι η σύνθεσή τους, $g \circ f : A \to C$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

ii) [1.0 μον.] Να δειχθεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x},\ x \in (0,1), \qquad g(x) = x^{1/3},\ x \in [0,\infty).$$

Θέμα 3ο. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μία φραγμένη συνάρτηση.

i) [1.0 μον.] Αν f συνεχής και $\int_a^b f^2(t)dt = 0$, να δειχθεί ότι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [a,b]$.

ii) [1.0 μον.] Γνωρίζουμε ότι αν P είναι μία διαμέριση του $[a,b]$ και P' είναι μία εκλέπτυνση της P, τότε για τα άνω και κάτω αθροίσματα της f ως προς τις P και P' ισχύει

$$L(f,P) \leq L(f,P') \leq U(f,P') \leq U(f,P).$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, να δειχθεί ότι για οποιεσδήποτε δύο διαμερίσεις Q, R του $[a,b]$ ισχύει $U(f,Q) \geq L(f,R)$.

Θέμα 4ο.

i) [0.5 μον.] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, με τύπο $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι Lipschitz.

ii) [1.0 μον.] Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{(x-3)(x+4)^2}dx, \qquad \int e^{2x} \cos x dx, \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^6 x \sin^5 x dx.$$

iii) [0.5 μον.] Βρείτε την $F'(1)$, όπου $F(x) = \displaystyle\int_1^{e^x} \cos(t^2)dt$.

iv) [0.5 μον.] Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_5^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}-2}$.

Θέμα 5ο. [2.0 μον.] Αν $f(x) = \cos(7x)$, $x \in \mathbb{R}$, βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{2n}(x) = T_{2n,f,0}(x)$ της f, τάξης $2n$ με κέντρο το 0. Βρείτε επίσης μία έκφραση για το αντίστοιχο υπόλοιπο Taylor $R_{2n}(x) = R_{2n,f,0}(x)$ (τάξης $2n$ με κέντρο το 0). Τέλος, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} T_{2n}(x) = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$